Computación Científica II

Error en Interpolación Polinomial

Gonzalo Vallejos Bobadilla [*]

gonzalo.vallejos@gled.cl

Departamento de Informática

Universidad Técnica Federico Santa María

1. Cota de error sobre un determinado valor

Si conocemos la función $f(x)$ y obtenemos el polinomio de interpolación $P(x)$ que aproxima a $f(x)$, podemos obtener el error de interpolación para algún valor de x con la diferencia $f(x) - P(x)$. Sin embargo, conociendo los puntos de apoyo podemos determinar ese error por medio de la siguiente fórmula:

$$|f(x) - P(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\xi)\omega(x)}{(n+1)!}$$

donde $f^{(n+1)}$ es la $(n+1)$-ésima derivada de f, ξ es un valor que se encuentra en el intervalo de las abscisas de apoyo usadas para la interpolación, y $\omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Sin embargo, no podemos determinar un ξ que nos asegure con exactitud el error de interpolación, por lo tanto buscaremos un ξ dentro del intervalo de tal forma que podamos determinar una cota de error máximo con la siguiente fórmula:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max\limits_{\xi} |f^{(n+1)}(\xi)|\omega(x)}{(n+1)!}$$

Por lo tanto, primero debemos derivar $(n+1)$ veces a f y luego inspeccionar dónde se encuentra el valor máximo.

Usemos como ejemplo aproximar la función $\sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ usando sólo 3 puntos de apoyo: $(0, 0)$, $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ y $(\pi/2, 1)$. Sin necesidad de crear el polinomio interpolador, trataremos de estimar una cota máxima de error para la abscisa $\pi/6$, es decir, queremos determinar el máximo error que podría haber con la diferencia $|\sin(\pi/6) - P(\pi/6)|$.

Utilizando la fórmula, primero debemos derivar la función $(n+1) = 3$ veces, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sin'(\xi) &= \cos(\xi) \\
\sin''(\xi) &= -\sin(\xi) \\
\sin'''(\xi) &= -\cos(\xi)
\end{aligned}$$

Ahora debemos determinar $\max\limits_{\xi} |-\cos(\xi)| = \max\limits_{\xi} \cos(\xi)$. Sabemos que la función $\cos(\xi)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ tiene valor máximo 1 cuando $\xi = 0$, por lo tanto $\max\limits_{\xi} \cos(\xi) = 1$. Reemplazando

[*] http://gonzalo.gled.cl

este valor en la fórmula, tenemos:

$$\begin{aligned}
|\operatorname{sen}(\pi/6) - P(\pi/6)| &\leq \frac{1}{(n+1)!}\omega(\pi/6) \\
&= \frac{1}{3!}(\pi/6 - 0)(\pi/6 - \pi/4)(\pi/6 - \pi/2) \\
&= 0{,}023925
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se puede conocer una cota máxima de error de interpolación en un determinado punto sin necesidad de crear el polinomio interpolador, y sin saber cuál es el valor de la función en ese punto.

2. Cota de error en un intervalo de datos equiespaciados

En algunas ocasiones necesitamos saber cuál es el error máximo de aproximación que se podría producir en un determinado intervalo. Si por ejemplo aproximamos una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ mediante un polinomio interpolador $P(x)$, el error máximo que se podría producir en ese intervalo con $(n+1)$ puntos de apoyo viene dado por:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f^{(n+1)}(\xi)| \max\limits_{a \leq x \leq b} |\omega(x)|}{(n+1)!}$$

A diferencia de la fórmula anterior, ahora debemos saber cuál es el valor de x que genere el mayor error, considerándolo en la expresión $\max\limits_{a \leq x \leq b} \omega(x)$. Sin embargo, no se puede determinar con facilidad esta expresión para cualquier conjunto de puntos de apoyo. Una solución para este problema es utilizar puntos de apoyo equiespaciados en el intervalo, es decir, que entre las abscisas de apoyo vecinas exista la misma distancia.
Para el caso de $(n+1)$ puntos de apoyo equiespaciados, en un intervalo $[a, b]$ la expresión anterior se puede extender a la siguiente forma:

$$\max_{a \leq x \leq b} |\omega(x)| \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \frac{n!}{4}$$

Por lo tanto, la cota máxima ahora va a depender de la cantidad de puntos de apoyo que elija para interpolar, y del rango del intervalo. Entonces, la fórmula para el error de interpolación máximo en un intervalo $[a, b]$ con $(n+1)$ puntos de apoyo equiespaciados es:

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{\max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)n!} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \frac{n!}{4} = \frac{\max\limits_{a \leq \xi \leq b} |f^{(n+1)}(\xi)|}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1}$$

Usemos el mismo ejemplo anterior para determina el máximo error de aproximación para $\sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ con 3 puntos de apoyo equiespaciados en el intervalo, $(0, 0)$, $(\pi/4, \sqrt{2}/2)$ y $(\pi/2, 1)$.

El valor $\max\limits_{0 \leq \xi \leq \pi/2} |\sin'''(\xi)|$ lo obtuvimos en el ejemplo anterior, cuyo valor resultó ser 1. Ahora simplemente reemplazamos los demás valores en la fórmula recién expresada:

$$\begin{aligned}
|\sin(x) - P(x)| &\leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{b-a}{n}\right)^{n+1} \\
&= \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \\
&= 0,04037
\end{aligned}$$

En algunas funciones las derivadas pueden tener el mismo máximo en valor absoluto, por ejemplo, sin importar cuántas veces derivemos $\sin(\xi)$ su valor máximo en valor absoluto será siempre 1 en el intervalo $[0, \pi/2]$. Gracias a esto, podemos saber cuántos puntos de apoyo equiespaciados necesitamos para que el error máximo en un intervalo no supere un número definido previamente. Supongamos que queremos aproximar $\sin(x)$ en un polinomio de interpolación en el intervalo $[0, \pi/2]$ de tal forma que el error no sea mayor a $0,001$ en ningún punto del intervalo. Usando la fórmula anterior, tenemos que:

$$|\sin(x) - P(x)| \leq \frac{1}{4(n+1)} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^{n+1}$$

Con esta expresión podemos probar el error resultante para distintos valores de n. Para $n = 2$ ya sabemos que el error es $0,04037$. Probando con otros valores tenemos:

$$\begin{aligned} n = 3 \quad &\rightarrow \quad |\sin(x) - P(x)| \leq 0,00469 \\ n = 4 \quad &\rightarrow \quad |\sin(x) - P(x)| \leq 0,00046 \leq 0{,}001 \end{aligned}$$

Por lo tanto, para aproximar la función de tal forma que el error no sea mayor a $0,001$ en el intervalo $[0, \pi/2]$ se necesitan al menos 5 puntos de apoyo.

Otra función que permite obtener fácilmente un máximo para cualquier derivada es e^x, ya que será igual para cualquier derivada, y el valor máximo se encontrará en e^b donde b es el borde superior del intervalo (como e^x es creciente el valor máximo se encontrará siempre en el extremo derecho).

Si las derivadas son muy variantes para diferentes valores de n, habrá que derivar las veces que sea necesario e ir determinando el máximo en esa derivada para ir probando con qué valor de n se satisface la restricción del error.

Referencias

[1] J. Stoer, R. Bulirsch, Introduction to Numerical Analysis, Second Edition.